

嵌入式工作室-算法竞赛方向-暑招

学习目标

- 了解时间复杂度和空间复杂度的概念，并能简要评估算法的优劣。
- 了解基本的数据结构与算法。
- 熟练运用自己擅长的语言解决简单的算法竞赛题目。
- 以蓝桥杯等算法竞赛为目标，争取拿到可观的奖项。

考核形式

- 算法竞赛方向暑招分为萌新题目和大佬题目，新人可任选其中一组题目完成。
- 萌新题目
 - 萌新题目分为多个知识板块，每个知识板块有1~2道填空题，0~3道编程题，以及0~1道附加题。
 - 萌新题目会提供学习引导，难度循序渐进，适合刚掌握了编程语言的同学挑战。
 - 每个板块的填空题和编程题会分配相应的分值。
 - 对于填空题，分数全部来自正确填写答案。
 - 对于编程题，通过题目可获得50%的题目分数，剩下的50%来自新人独立编写的题解。
 - 部分板块存在附加题，如果通过了附加题并编写了相应的题解（附加题是填空题也要写题解），该板块直接记满分，无论是否通过其他题目或编写题解。
 - 题解过于敷衍将不能得到题解分。附加题的题解过于敷衍则附加题无效。
 - 可以参考网上的代码，但不能复制粘贴，可以理解后自行编写。
 - 通过考核的具体分数标准待定。
- 大佬题目
 - 大佬题目会给出多道难度较高的算法竞赛题目，新人须编写程序通过题目，并编写相应的题解。
 - 总分不低于100分即可通过考核。
- 对于编程题，若无额外说明，你的程序应当使用不超过2秒的时间，512MB的内存来完成运算。
- 对于所有题目，你可以使用以下三种编程语言：
 - C/C++
 - java
 - python
- 题目名称后的括号内的数字表明了该题的难度，其意义如下：
 - 1：入门题。仅需阅读并思考就能通过。
 - 2：简单算法。需要简单学习并思考才能通过。
 - 3：进阶算法。需要学习并深入思考理解才能通过，熟练通过此难度的题目，有较大概率获得蓝桥杯省赛奖项或者ICPC区域赛铜牌。
 - 4：较难的算法应用。不仅需要较深的思考，还涉及到复杂的代码编写，对智力和熟练度都是不小的考验。如果你能轻松解决这个难度的题目，恭喜你，你将有很大概率进入蓝桥杯国赛，或者冲击ICPC银牌。
 - 5：大佬与萌新的分水岭。多种高级算法，高级数据结构的杂糅，赛场上遇到将对心态产生不小的打击，复杂的思维过程以及代码难度让许多算法竞赛职业选手止步于此。能解决这个难度的题目，你将拥有冲击ICPC金牌，蓝桥杯国一的底力，站在算法竞赛金字塔的上层。
 - 6：可能将作为各个算法竞赛的压轴题，让金牌大佬也很难在短时间内捋清楚逻辑，即使是自己私底下花数天甚至数周搞清楚这个等级的题目，也是一件很难的事。如果你能轻松解决这个

难度的题目，国内算法竞赛的奖牌对你来说将不再具备含金量。

- 7: 神的世界我不懂。
- 数字后带+表明属于这个等级中较难的题目。
- 题目难度由出题人主观划分，可能并不符合每一个人的感受。

如何提交

- 萌新题目
 - 对于每个板块分别建立以板块名为名的文件夹
 - 对于填空题，建立"题号.md"，并在内写入答案。由于某些填空题的答案是数学公式，请正确使用latex。
 - 对于编程题，建立以题目名为名的子文件夹，然后将你的源代码，题解放入该文件夹内。
- 大佬题目
 - 对于你选择的题目建立以题目名为名的文件夹，然后将你的源代码，题解放入该文件夹内。
- 最后将你的所有文件打包到"姓名-学号-嵌入式工作室算法竞赛方向.zip"，发送到 mikiwang@std.uestc.edu.cn
- 截止时间2021年8月1日23:59

萌新题目（100分）

时间复杂度与空间复杂度（2分）

在算法竞赛中，对于编写的程序，除了正确性外，我们还特别关心效率问题。而我们通常使用时间复杂度和空间复杂度表示程序的运行效率。请新人自行学习时间复杂度与空间复杂度的相关内容，并完成以下习题：

1. 填空题（1）（1分）

归并排序的时间复杂度为（）。

2. 填空题（1）（1分）

快速排序的最劣时间复杂度为（）。

快速排序的最优时间复杂度为（）。

快速排序的平均时间复杂度为（）。

3. 附加题，填空题（3）

阅读C/C++程序，分析fft与rev的时间复杂度(用 n 表示，例如 $O(n^2)$)。省略部分执行单次的时间复杂度为 $O(1)$ 。

fft的时间复杂度为（）。

rev的时间复杂度为（）。

```
void fft(int *a,int n,int op){
    ...
    for(int l=1;l<n;l<=<1){
        ...
        for(int i=0;i<n;i++;i+=l<1){
            ...
            for(int j=0;j<l;j++){
                ...
            }
        }
    }
}
```

```
    }  
}  
void rev(int n){  
    for(int l=1;l<n;l<=l)fft(l);  
}
```

简单数据结构（12分）

1. 填空题（2）（2分）

一颗二叉树的前序遍历为"abcdefghi"，中序遍历为"cbdefahgi",他的后序遍历是（）。

2. 编程题，括号序列（2）（4分）

- 题目描述

输入一个由小括号，中括号和大括号组成的括号序列，请问它是否是合法的括号序列？

合法的定义如下：

1. 空串是合法的括号序列。
2. 若S是合法的括号序列，则(S),[S],{S}都是合法的括号序列。
3. 若S和T是合法的括号序列，则ST是合法的括号序列。

- 输入样例1

```
{()([])}
```

- 输出样例1

```
YES
```

- 输入样例2

```
([]]
```

- 输出样例2

```
NO
```

3. 编程题，排队（2+）（6分）

- 题目描述

n 个学生排成一列，每个同学都想知道站在他前面比他高的同学中离他位置最近人的身高是多少，如果不存在比他高的同学，则输出0。

请使用时间复杂度为 $O(n)$ 的算法。

- 输入格式

第一行一个正整数 n ，表示学生的数量。

第二行 n 个正整数 $h_1, h_2, \dots, h_n (1 \leq h_i \leq 10^9)$ 表示同学们的身高。

- 输出格式
仅一行， n 个正整数，第 i 个正整数表示站在第 i 个同学前边的同学中，比第 i 个同学高，且离第 i 个同学位置最近的同学的身高。
- 输入样例

```
6
153 170 114 514 191 9810
```

- 输出样例

```
0 0 170 0 514 0
```

4. 附加题，排序 (4)

- 题目描述
给定一个长度为 n 的0/1序列，进行 m 次排序操作，请输出排序后的序列。
- 输入格式
第一行一个正整数 $n, m (1 \leq n, m \leq 3 \times 10^5)$ ， n 表示序列的长度， m 表示排序操作的次数。
第二行 n 个整数 $a_1, a_2, \dots, a_n (a_i \in \{0, 1\})$ 表示这个0/1序列。
接下来 m 行每行三个整数 $op, l, r (op \in \{0, 1\}, 1 \leq l \leq r \leq n)$ 。
若 $op = 0$ ，表示将 $a_l, a_{l+1}, \dots, a_r$ 按升序排序。
若 $op = 1$ ，表示将 $a_l, a_{l+1}, \dots, a_r$ 按降序排序。
- 输出格式
仅一行， n 个整数，表示排序后的序列。
- 输入样例

```
4 2
0 1 1 0
1 1 2
0 3 4
```

- 输出样例

```
1 0 0 1
```

动态规划 (25分)

动态规划的核心思想是“状态设计”，“边界条件”，“状态转移”。请自行学习并理解上述词汇，完成下列题目。

1. 填空题，走楼梯 (2) (4分)

小明每次可以走1或3步台阶，则他走20步台阶有 () 中不同的方案。

2. 编程题，摘苹果 (2+) (6分)

- 题目描述
小明有一个容量为 m 的篮子，果树上有 n 个苹果，第 i 个苹果的价值为 a_i ，体积为 b_i 。小明想使得他摘得苹果价值和尽可能地大，但体积和不能超过篮子的容量。
- 输入格式
第一行两个正整数 $n, m (1 \leq n, m \leq 5000)$ 。

接下来 n 行，每行两个正整数 $a_i, b_i (1 \leq a_i, b_i \leq 5000)$ 。

- 输出格式
仅一行，小明能摘得的苹果的最大价值和。
- 输入样例

```
3 5
2 3
2 2
3 4
```

- 输出样例

```
4
```

3. 编程题，最大子段和 (3) (15分)

- 题目描述
给定一个序列 $a_1, a_2, \dots, a_n$ ，请选出 k 个不相交的非空连续段，使得他们的和最大化。
- 输入格式
第一行两个正整数 $n, k (1 \leq n \leq 10^4, 1 \leq k \leq 10^3, k \leq n)$ 。
第二行 n 个正整数 $a_1, a_2, \dots, a_n (-10^4 \leq a_i \leq 10^4)$ 。
- 输出格式
仅一行，一个整数表示答案。
- 输入样例

```
3 2
1 -1 1
```

- 输出样例

```
2
```

4. 附加题，分段极差 (4)

- 题目描述
给定一个序列 $a_1, a_2, \dots, a_n$ ，请选出 k 个不相交的非空连续段，使得他们每段的极差之和最大化。
- 输入格式
第一行两个正整数 $n, k (1 \leq n \leq 10^4, 1 \leq k \leq 10^3, k \leq n)$ 。
第二行 n 个正整数 $a_1, a_2, \dots, a_n (-10^4 \leq a_i \leq 10^4)$ 。
- 输出格式
仅一行，一个整数表示答案。
- 输入样例

```
4 2
1 4 2 5
```

- 输出样例

```
6
```

图论 (37分)

1. 填空题 (1) (1分)

一个图能进行拓扑排序的条件是它是一个 () 图。

2. 编程题, 可达性 (3) (15分)

- 题目描述

给定一个有向图, 标号为 i 的点的点权为 a_i , 求每个点能够到达的点的点权和。

- 输入格式

第一行两个正整数 $n, m (1 \leq n, m \leq 10^5)$, n 表示点的数量, m 表示边的数量。

第二行 n 个正整数 $a_1, a_2, \dots, a_n (1 \leq a_i \leq 10^4)$ 。

接下来 m 行, 每行两个正整数 u, v , 表示标号为 u 的点到标号为 v 的点有一条有向边。

- 输出格式

仅一行, n 个正整数, 第 i 个数表示从标号为 i 的点出发, 能到达的所有点的点权和。

- 输入样例

```
3 3
1 2 3
1 2
2 3
3 2
```

- 输出样例

```
6 5 5
```

3. 编程题, 路径计数 (3) (15分)

- 题目描述

给定一个有向图, 定义函数 $f(i)$, 其取值如下:

1. $f(i) = -1$, 若从标号为1的点出发, 有无数条路径能到达标号为 i 的点。

2. $f(i) = 0$, 若从标号为1的点出发, 不能到达标号为 i 的点。

3. $f(i) = 1$, 若从标号为1的点出发, 有1路径能到达标号为 i 的点。

4. $f(i) = 2$, 若从标号为1的点出发, 有 $x (2 \leq x, x \in N)$ 条路径能到达标号为 i 的点。

- 输入格式

第一行两个正整数 $n, m (1 \leq n, m \leq 10^5)$, n 表示点的数量, m 表示边的数量。

接下来 m 行, 每行两个正整数 u, v , 表示标号为 u 的点到标号为 v 的点有一条有向边。

- 输出格式

仅一行, n 个正整数, 第 i 个数表示 $f(i)$ 。

- 输入样例

```
6 7
2 1
1 3
3 4
4 3
1 5
1 6
5 6
```

- 输出样例

```
1 0 -1 -1 1 2
```

4.编程题，直径（2+）（6分）

- 题目描述
给定一棵树，求任意两点之间距离的最大值（定义为直径）。
请使用时间复杂度为 $O(n)$ 的算法。
- 输入格式
第一行一个正整数 n 。
接下来 $n - 1$ 行，每行三个正整数 u, v, w 表示标号为 u 的点与标号为 v 的点被一条长度为 w 的无向边链接起来。
- 输出格式
仅一行，一个正整数表示树的直径。
- 输入样例

```
4
1 2 1
1 3 2
1 4 3
```

- 输出样例

```
5
```

数学（24分）

1. 填空题（1）（1分）

1919810和114514的最大公约数为（ ）。

2. 填空题（2）（4分）

小于 10^8 的质数有（ ）个。

3. 编程题（2）（4分）

- 题目描述
输入三个正整数 $a, b, c (1 \leq a, b, c \leq 10^9)$ ，如果 $ax + by = c$ 有整数解，请输出任意一组解，否则输出-1。
- 输入样例1

```
1 3 4
```

- 输出样例1

```
x=1
y=1
```

- 输入样例2

2 4 1

- 输出样例2

-1

4. 编程题，欧拉函数（3）（15分）

- 题目描述

定义欧拉函数 $\varphi(n)$ 为 $1 \sim n$ 中与 n 互质的数的个数。例如 $\varphi(5) = 4, \varphi(6) = 2$ 。输入 $n(1 \leq 10^14 \leq n)$ ，请求出 $\varphi(n)$ 。

- 输入样例

6

- 输出样例

2

大佬题目（300分）

欧拉函数（4+）（40分）

- 题目描述

定义欧拉函数 $\varphi(n)$ 为 $1 \sim n$ 中与 n 互质的数的个数。例如 $\varphi(5) = 4, \varphi(6) = 2$ 。

$$\text{令 } f(n) = \sum_{i=1}^n \varphi(i)$$

- 输入格式

仅一行，一个正整数 $n(1 \leq n \leq 10^9)$ 。

- 输出格式

仅一行，一个整数，表示 $f(n) \bmod 998244353$ 。

- 输入样例

6

- 输出样例

12

- 样例解释

$$\varphi(1) = 1, \varphi(2) = 1, \varphi(3) = 2, \varphi(4) = 2, \varphi(5) = 4, \varphi(6) = 2$$

最大公约数（5）（60分）

- 题目描述

$$\text{令 } \gcd(i, j) \text{ 表示 } i \text{ 与 } j \text{ 的最大公约数，求 } f(n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \gcd(i, j)$$

- 输入格式

仅一行，一个正整数 $n(1 \leq n \leq 10^6)$ 。

- 输出格式
仅一行，一个整数，表示 $f(n) \bmod 998244353$ 。
- 输入样例

2

- 输出样例

5

重复子串 (4+) (40分)

- 题目描述
给定一个字符串 S ，求一个字符串 t ，使得 t 在 S 中至少出现了 k 次。请问 t 的长度最大是多少
- 输入格式
第一行，一个正整数 k
第二行，一个由小写字母组成的字符串 S 。
 S 的长度不超过 3×10^5 ， k 不大于 S 的长度。
- 输出格式
仅一行，一个整数，表示 t 的最大长度。注意，空串的长度为0。
- 输入样例

3
aaaaa

- 输出样例

3

区间逆序对 (6) (100分)

- 题目描述
给定一个序列 $a_1, a_2, \dots, a_n$ ，一个逆序对 (i, j) 是指 $i < j$ 且 $a_i > a_j$ 。
一个序列的子序列 $a[l, r]$ 是指 $a_l, a_{l+1}, \dots, a_r$ 构成的序列。
接下来有多个询问，对于每个询问，你需要回答一个子序列的逆序对个数。
- 输入格式
第一行两个正整数 n, m ($1 \leq n, m \leq 10^5$)， n 表示序列的长度， m 表示询问的个数。
第二行 n 个正整数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ ($1 \leq a_i \leq 10^5$)。
接下来 m 行每行两个正整数 l_i, r_i ($1 \leq l_i \leq r_i \leq n$)，你需要回答 $a[l_i, r_i]$ 的逆序对个数。
- 输出格式
 m 行，每行一个正整数表示逆序对个数。
- 输入样例

4 1
1 4 2 3
2 4

- 输出样例

2

排列计数(5) (60分)

- 题目描述

一个 $1 \sim n$ 的排列 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 是优秀的排列当且仅当对于所有 i , 若 $k < i \leq n$, 则

$$\min_{i-k \leq j < i} \{a_j\} < a_i.$$

给出 n 和 k , 请问共有多少个优秀的排列? (其个数记为 ans)

- 输入格式

仅一行两个正整数 $n, k (1 \leq k, n \leq 10^7)$ 。

- 输出格式

仅一行, 一个整数 $ans \bmod 998244353$ 。

- 输入样例

```
1 1
```

- 输出样例

```
1
```